

分子科学アーカイブス

AC0003

電磁気学における単位系

山崎勝義 著

公開日 2007年 6月29日 第1版

公開日 2010年 12月28日 第2版

分子科学会編集委員会は、優れたテキストを分子科学アーカイブスとして公開しますが、その内容の一切の責任は著者にあります。読者からの貴重なご意見は、(molsci-edit@bunken.co.jp)で随時受け付けております。ご意見は編集委員会から著者にお伝えし、テキストの内容に反映していきます。

著者紹介



山崎勝義 (やまさきかつよし)

所属：広島大学大学院理学研究科化学専攻

専門分野：反応物理化学

改訂履歴

	第1版		第2版
p. 1, §0本文第5行	ことで混乱	p. 1, §0本文第5行	ことで(一応)混乱
p. 1, 脚注1	筆者は, 大学教養時代	p. 1, 脚注1	筆者は大学教養時代
p. 1, 脚注4	SI単位系で	p. 1, 脚注4	MKSA単位系で
p. 3, 下から第2行	$e^{2\pi i(x-ut)/\lambda}$	p. 3, 下から第2行	$e^{2\pi i(x-ut)/\lambda}$
p. 4, 下から第12行	式(13), (15)あるいは式(26)から	p. 4, 下から第12行	式(13)および(15)から
p. 4, 脚注2	本書では, $c_0 =$	p. 4, 脚注2	本書では $c_0 =$
p. 6, 第4行	真空透磁率は	p. 6, 第4行	真空透磁率を
p. 6, 第9行	ことから電磁単位系列の単位系である。	p. 6, 第9行	ので, 分類上は電磁単位系である。
p. 6, 表1, 脚注	MKSA系では, $c_0 =$	p. 6, 表1, 脚注	MKSA系では $c_0 =$
p. 6, 脚注3	通常は, μ_0 を独立量する	p. 6, 脚注3	通常は μ_0 を独立量とする
p. 7, 第4行	1882-83年	p. 7, 第4行	1882~83年
p. 7, 第8, 12行	sec	p. 7, 第8, 12行	s
p. 7, 第8行	Frを基本単位	p. 7, 第8行	Fr(フランクリン)を基本単位
p. 7, 第10行	基本単位であるCGS esu系の電荷にFr(フランクリン)という名称が与えられた。	p. 7, 第10行	Frは同単位系の電荷の単位の名称である。
p. 7, 第12行	Biを	p. 7, 第12行	Bi(ビオ)を
p. 7, 第12~13行	CGS emu系の電流にBi(ビオ)という名称が与えられた。	p. 7, 第12~13行	Biは同単位系の電流の単位の名称である。
p. 8, 第1行	との比較から,	p. 8, 第1行	と同様に,
p. 8, 第11行	立場では, 磁石の基本は磁荷ではなく(円)電流であるとして磁荷というものを考えない。	p. 8, 第11行	磁荷というものを考えず, 磁石の基本は(円)電流であるとする。
p. 8, 下から第10行	ビオ・サバールの法則が表す磁場(正確には磁束密度)と電流の相互作用で	p. 8, 下から第10~11行	電流とビオ・サバールの法則で表される磁場(正確には磁束密度)の間の相互作用により
p. 8, 脚注1	この式	p. 8, 脚注1	アンペールの式
p. 8, 脚注1	必要はない。	p. 8, 脚注1	必要はなく,
p. 11, 第4行	現れた文字を,	p. 11, 第4行	現れた文字(物理量)を,
p. 11, 脚注1		p. 11, 脚注1	(Green Book英語第2版に関する記述から第3版の英語版および日本語に関する記述に書き換え)
p. 12, 下から第7行	単位間の換算	p. 12, 下から第5行	単位の換算

第1版		第2版	
		p. 13, 脚注1	前出の「Green Book」日本語版p. 235に掲載されている「エネルギーに関する単位の相互換算表」では、物理法則が関係する換算を示すために、単なる等号「=」ではなく「≐」という記号を用いている。
p. 16, 下から第6行	変形され、直前の <i>H</i> に関する換算	p. 16, 下から第3行	変形される。直前の <i>O_e</i> と $A m^{-1}$ の間の換算
p. 16, 下から第6行	を適用した	p. 16, 下から第3行	適用して得られる
p. 16, 下から第2行	従って、	p. 17, 第2行	となり、
p. 17, 下から第10行	という単位名称	p. 17, 下から第5行	という名称
p. 17, 下から第8行	付けてもよいと考えるかも	p. 17, 下から第3行	与えてもよいと考えられるかも
p. 17, 下から第4行	ならず、 4π 分の	p. 18, 第2行	ならず 4π 分の
p. 18, 第2行	表記にする	p. 18, 第7行	表記に変換する
p. 18, 第6行	見ていく	p. 18, 第11行	見る
p. 19, 第2行	(プライム記号(')を付けたものがCGS esu系の電場である)		(削除)
p. 19, 第9行	∇ の単位が	p. 19, 第11行	であり、 ∇ の単位が
p. 19, 第9行	であることからわかり、 m^{-1}	p. 19, 第11行	であること、および m^{-1}
p. 19, 下から第13行	$g^{1/2} cm^{-1/2} s^{-1}$	p. 19, 下から第9行	$g^{1/2} cm^{-1/2} s^{-1}$ (2箇所)
p. 19, 下から第11行	するには、 ζ を	p. 19, 下から第7行	するには ζ を
p. 20, 第1行	単位系間の	p. 20, 第5行	異なる単位系への
p. 20, 式(114)	$m_B = -\frac{e}{2m} l$	p. 20, 式(114)	$m_B = -\frac{e}{2m_e} l$
p. 20, 第11行	掛けられた	p. 20, 第15行	かけられた(2箇所)
p. 25, 表5脚注	$\epsilon_0 = 1$	p. 25, 表5脚注	$\epsilon_0 = 1$
(全体)	あいだ		間
(全体)	従って		したがって

電磁気学における単位系

§0 はじめに

電磁気学の学習の中で意外に高い障壁が単位系の理解である。単位は、物理量の大きさを共通の“言葉”で伝達し合うために人間が考案したものであるが、電磁気現象の記述において多くの単位(系)が存在するために混乱が生じやすく、現象の定式化よりも単位系という人為的な約束ごとの理解に時間とエネルギーを費やさざるをえない事態に陥ることがある¹。地球上には多くの言語が存在するが、英語を“共通語”と認識することで(一応)混乱が避けられている。電磁気学にも MKSA 単位系という“標準語”が存在するが²、分野によってはいまだに“昔の標準語”である別の単位系が使われることがある(新刊書であっても非 SI の単位系が使われている場合もある)³。名著や古典と呼ばれるような由緒ある成書をひもといて基本事項を学習しようとしても、古い書物の大半が MKSA 単位系で書かれていないので、単位系の相違が原因で難解さが増すことがある⁴。とはいえ、単位系を正しく理解しなければ、理論式に数値を代入して計算をすることもできないし、ある単位系で書かれた式を別の単位系の式に変換することもできない。本書は、電磁気学に関する単位系の混乱を解消し、異なる単位系の間を自由に行き来するための“ワザ”の習得をめざして書かれた monograph である。

§1 単位系の種類

電磁気量を記述する単位系を考える基本は、電気系と磁気系の物理量およびそれらの相互作用(力)を表す法則式である。電荷(電気量)間にはたらく力を表すクーロン(Coulomb)の法則

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\alpha} \frac{q_1 q_2}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (1)$$

磁荷(磁気量)間にはたらく力を表すクーロンの法則⁵

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\beta} \frac{q_{m1} q_{m2}}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (2)$$

電流と磁場の相互作用を表すアンペール(Ampère)の力

¹ 筆者は大学教養時代にこの状況に陥った。同じ現象を表す式の形が成書ごとに異なっていると、論理展開よりも単位系を理解することの方が先決問題になってしまうことがある。
² 英語が最も合理的で使いやすい言語とは限らないのと同様に、MKSA 単位系が電磁気学の単位系の中で最も合理的で使いやすいとはいえない。
³ 理論物理学系の分野(量子力学など)では、現在でも Gauss 単位系が用いられていることが多い。
⁴ 時代が遡るほど、MKSA 単位系で記述されている確率は低くなる。
⁵ あとで述べるように、磁気の本質は磁荷ではなく電流であり、単極の磁荷は仮想的なものではないが、単位系を考える上では、磁荷を想定しても問題は生じない。

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\gamma} I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad (3)$$

が電磁気学において重要な力の式である。ここで、 \mathbf{F} は力、 r は電荷間や磁荷間の距離、 \mathbf{e}_r は r に沿う単位ベクトル(= \mathbf{r}/r)、 q は電荷、 q_m は磁荷、 I は電流、 $d\mathbf{l}$ は電流に沿う素片のベクトル($I d\mathbf{l}$ が電流素片ベクトル)、 \mathbf{B} は磁束密度であり、 α 、 β 、 γ (の逆数)は比例定数である。ここで、電気系には誘電率 ϵ 、磁気系には透磁率 μ と呼ばれる物理量を設定し¹、 α 、 β をそれぞれ

$$\alpha = k\epsilon \quad (4)$$

$$\beta = k\mu \quad (5)$$

と書くと、マクスウェル(Maxwell)の方程式は次の4式で表されることになる²。

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{4\pi}{k} \rho \quad (6)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (8)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{\gamma k} \mathbf{j} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (9)$$

ここで、 \mathbf{D} は電束密度、 ρ は電荷密度、 \mathbf{H} は磁場の強さ、 \mathbf{j} は電流密度³である。なお、 \mathbf{D} と \mathbf{E} の間には

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (10)$$

\mathbf{B} と \mathbf{H} の間には

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (11)$$

の関係がある。いま、真空を想定すると(電荷や電流が存在しない状態： $\rho = 0$, $\mathbf{j} = \mathbf{0}$)、 $\epsilon = \epsilon_0$ 、 $\mu = \mu_0$ とおけるから(ϵ_0 , μ_0 はそれぞれ真空誘電率と真空透磁率)、式(6)~(9)に対応するマクスウェルの方程式は

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (12)$$

¹ 現段階ではその単位(次元)も大きさも未定である。誘電率も透磁率も物質に依存する。

² マクスウェルの方程式の導出は電磁気学のテキストを参照のこと。(マクスウェルの方程式が解説されていない電磁気学のテキストを見つけるのは難しいくらいである。)

³ 単位時間あたり単位面積を通過する電気量(電荷量)である。言い換えると、電荷のフラックス(flux)である。

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (13)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (14)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\epsilon_0 \mu_0}{\gamma} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (15)$$

の形となる。

式(13)の両辺の $\text{rot}(\equiv \nabla \times)$ をとると¹,

$$\text{(左辺)} \rightarrow \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) \quad (16)$$

$$\text{(右辺)} \rightarrow \nabla \times \left(-\frac{1}{\gamma} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\frac{1}{\gamma} \left(\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (17)$$

となる。式(16)は、ベクトルの代数公式を使って、

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} \quad (18)$$

と変形できるが、式(12)により右辺第1項が消えて、

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\nabla^2 \mathbf{E} \quad (19)$$

の形になる。一方、式(17)の $\nabla \times \mathbf{B}$ に式(15)を代入すると、

$$-\frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}) = -\frac{\epsilon_0 \mu_0}{\gamma^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = -\frac{\epsilon_0 \mu_0}{\gamma^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (20)$$

となり、式(19)と式(20)が等しいことから、

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{\epsilon_0 \mu_0}{\gamma^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (21)$$

が成立する。これは波動を表す方程式であり、速さ

$$v = \frac{\gamma}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad (22)$$

で進行する波動を表している(たとえば、波長 λ 、速さ v で伝搬する波の式 $e^{2\pi i(x-vt)/\lambda}$ が式(21)を満足することは容易に確認することができる)。つまり、電場は速さ v で伝搬する波として

¹ rot は「回転」に由来しており curl とも記す。 $\nabla \times \mathbf{A} = \text{rot } \mathbf{A} = \text{curl } \mathbf{A}$ である。

存在しうることになる。

一方、式(15)の両辺の rot をとると、左辺からは、

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B} = -\nabla^2 \mathbf{B} \quad (23)$$

が得られ(式(14)を適用)、式(15)の右辺からは、

$$\nabla \times \left(\frac{\epsilon_0 \mu_0}{\gamma} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \frac{\epsilon_0 \mu_0}{\gamma} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{\epsilon_0 \mu_0}{\gamma^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \quad (24)$$

が得られるから(式(13)を適用)、

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \frac{\epsilon_0 \mu_0}{\gamma^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \quad (25)$$

が成立する。この式は式(21)とまったく同型であるから、磁場も電場と同じ速さ $\gamma/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ で伝搬する波として存在しうることがわかる。速さ v は真空中の光速 $2.99792458 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ に対応しており¹、以後、これを c_0 と記すことにする²。したがって、

$$c_0 = \frac{\gamma}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad (26)$$

が常に成立する(式(13)および(15)からわかるように、定数 γ は電氣的な現象と磁氣的な現象をつなぐ役割を果たしており、その意味で「連結因子」と呼ばれることがある。式(26)の関係は単位系にかかわらず常に成立しなければならないから、3つの定数 α , β , γ のうち独立に与えうるもの(独立量)は2つだけである。したがって、定数 α , β , γ のとり方(言い換えると、 ϵ_0 , μ_0 , γ , k の与え方)にもとづいて、いくつかの単位系が構成されることになる。

- [1] ϵ_0 , μ_0 , γ のとり方 → 独立量の相違
- [2] k のとり方 → 定数値の相違
- [3] 単位のととり方 → 基本単位の相違

[1]は非常に重要であり、電氣量にかかわるもの(たとえば ϵ_0)を定義してからその他の定数を決める(静電単位系; **Electrostatic system of units**=esu 単位系)、磁氣量にかかわるもの(たとえば μ_0)を定義してから他の定数を決める(電磁単位系; **Electromagnetic system of units**=emu 単位系)、 ϵ_0 と μ_0 両方に定義を与える(Gauss 系)などの単位系があり、それぞれ

¹ この数値は測定値ではなく、定義された値(exact)である。

² したがって、本書では $c_0 = 2.99792458 \times 10^8 \text{ m s}^{-1} = 2.99792458 \times 10^{10} \text{ cm s}^{-1}$ である。

れの単位系ごとに物理量の単位(次元)だけでなく理論式の見かけの形も変わることになる。

[2]に関して、 $k = 4\pi$ とする場合を有理系といい、 $k = 1$ とする場合を非有理系という¹。これらは、理論式の見かけの形にかかわる問題であり本質的な点ではないが、いくつかの成書に書かれた式同士を比較したり、式に数値を代入して計算したりするときには、どちらの系で書かれたものかを把握しておかなければ正しい値を得ることができない。有理系では、クーロンの法則やビオ・サバル(Biot-Savart)の法則に 4π が現れて複雑に見えるが、逆に、マクスウェル方程式に 4π が現れなくなるため見かけがきれいになる。非有理系はこの逆で、クーロンの法則は見かけがすっきりするが、マクスウェル方程式の随所に 4π が現れる。

[3]は、物理量の大きさを表す単位を **cm, g, s** で統一するか、**m, kg, s, A**(または**C**)で統一するかという区別である。前者を3元系、後者を4元系と呼ぶ。

以下に、主な単位系の定義と特徴を記す。

1) CGS esu(CGS 静電単位系)

- 基本単位は **cm, g, s** である(3元系)。
- $k = 1$ (非有理系)とする。
- 真空誘電率 ϵ_0 と連結因子 γ を独立量にとり、 $\epsilon_0 = 1$ および $\gamma = 1$ (いずれも無次元)と定義する。したがって、真空透磁率 μ_0 は式(26)より、

$$\mu_0 = \frac{1}{c_0^2} = 1.11265... \times 10^{-21} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^2 \quad (27)$$

となる。

2) CGS emu(CGS 電磁単位系)

- 基本単位は **cm, g, s** である(3元系)。
- $k = 1$ (非有理系)とする。
- 真空透磁率 μ_0 と連結因子 γ を独立量にとり、 $\mu_0 = 1$ および $\gamma = 1$ (いずれも無次元)と定義する。したがって、真空誘電率 ϵ_0 は式(26)より、

$$\epsilon_0 = \frac{1}{c_0^2} = 1.11265... \times 10^{-21} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^2 \quad (28)$$

となる。

3) Gauss 単位系

- 基本単位は **cm, g, s** である(3元系)。
- $k = 1$ (非有理系)とする。
- 真空誘電率 ϵ_0 と真空透磁率 μ_0 を独立量とし、両方を1(無次元)と定義する。したがって、連結因子が $\gamma = c_0 = 2.99792458 \times 10^{10} \text{ cm s}^{-1}$ となる。

¹ 4π は全球の立体角に由来している。

4) MKSA 単位系¹

- 基本単位は m, kg, s, A(または C)である(4 元系)。
- $k = 4\pi$ (有理系)とする。
- 真空透磁率 μ_0 と連結因子 γ を独立量にとる。真空透磁率を

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N A}^{-2} = 4\pi \times 10^{-7} \text{ kg m C}^{-2} \quad (29)$$

と定義(exact 値を設定)し², 連結因子を $\gamma = 1$ (無次元)とするから, 式(26)より真空誘電率は

$$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c_0^2} = 8.854187817 \dots \times 10^{-12} \text{ N}^{-1} \text{ C}^2 \text{ m}^{-2} \quad (30)$$

となる。 μ_0 も c_0 も定義された値(exact)であるから ϵ_0 も定義値となるが³, μ_0 が数値で与えられ, ϵ_0 の中に光速が入っているので, 分類上は電磁単位系である。1901年に G. Giorgi が提案し, 1954年の第10回国際度量衡総会の決議により国際単位系(SI)として採択された。

以下では, 各単位系を, CGS esu 系, CGS emu 系, Gauss 系, MKSA 系と呼ぶ。これらの代表的4単位系の設定をまとめたものが表1である。

表 1. 代表的な 4 単位系の設定

単位系	基本単位	独立量	k	ϵ_0	μ_0	γ
CGS esu	cm, g, s	ϵ_0, γ	1	1	$1/c_0^2$	1
CGS emu	cm, g, s	μ_0, γ	1	$1/c_0^2$	1	1
Gauss	cm, g, s	ϵ_0, μ_0	1	1	1	c_0
MKSA	m, kg, s, A	μ_0, γ	4π	$1/(\mu_0 c_0^2)$	$4\pi \times 10^{-7}$	1

(注) c_0 は真空中の光速であり, その大きさは各単位系の基本単位を用いて表す。したがって, MKSA 系では $c_0 = 2.99792458 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ であり, それ以外の単位系については $c_0 = 2.99792458 \times 10^{10} \text{ cm s}^{-1}$ である。

¹ MKSQ 単位系ともいう。

² 定義される数値であるから単に 1 でもよいはずであるが, とても思い付きようがない値に設定されている(電磁気学の単位系に対する戸惑いはこの不思議な数値から始まるといっても過言ではない)。この値は, 昔から電気工学分野で使われていた V(ボルト), A(アンペア), Ω (オーム), W(ワット)などの単位の大きさを変えないように単位系を構築したことのしわ寄せであり, 基本量としての透磁率や誘電率を(定義値らしくない)定数として与えざるをえなかったという経緯である。(値を自由に決めていいといわれて $4\pi \times 10^{-7}$ にとる人は, まず, いないであろう。)

³ ϵ_0 も μ_0 も定義値であるからどちらを先に与えても結果は同じであるが, 通常は μ_0 を独立量とする。

5) その他の単位系

○ローレンツ-ヘビサイド単位系

Gauss 系同様に、電氣的な量には CGS esu を、磁氣的な量には CGS emu を使うが、有理系の単位系である。ヘビサイド(O. Heaviside)が 1882~83 年に提案しローレンツ(H. A. Lorentz)が再編成したもので、有理系の元祖といえる単位系である。一時期広く使われたが MKSA 系へと移行した。

○一般化 CGS 静電単位系(一般化 CGS esu)

CGS esu を 4 元系にしたもの。cm, g, s, Fr(フランクリン)を基本単位とする。CGS esu 系から MKSA 系へ移行する過渡的措置として、国際記号単位述語委員会(SUN 委員会)が採択したもの。Fr は同単位系の電荷の単位の名称である。

○一般化 CGS 電磁単位系(一般化 CGS emu)

CGS emu 系を 4 元系にしたもの。cm, g, s, Bi(ビオ)を基本単位とする。Bi は同単位系の電流の単位の名称である。

○MKSP 単位系

鈴木範人, 小塩高文「応用光学 II」(朝倉書店, 1982)の中で紹介されている単位系。MKSP の P は Physical を意味する。有理 3 元系(MKS)であり, $\epsilon_0 = \mu_0 = 1, \gamma = c_0$ とする。したがって、ローレンツ-ヘビサイド単位系の MKS 版ということもできる。電気系と磁気系に対する Gauss 系の対称性のよさを活かしつつ、非有理系という Gauss 系の欠点¹を解消するために考案されたが広く普及はしていない。

§2 電場と磁場の対応(**E-H**対応と **E-B**対応)

電磁気学の単位に関する重要な点として、電氣的な量と磁氣的な量の対応の問題がある。電氣量である電荷に対応するものとして、磁氣量として“磁荷”を考え、磁荷に対するクーロンの法則を基本とする立場が **E-H** 対応と呼ばれるものである。つまり、**E-H** 対応は磁石が作る磁場を出発点とする立場である。しかし、電荷と違って、これまでに単独の磁荷のみ(つまり単独の *N* 極あるいは *S* 極のみ)が取り出されたことはなく、磁荷は存在しないとされている。しかし、理論的な取り扱いにおいて、 $q \leftrightarrow q_m, \epsilon_0 \leftrightarrow \mu_0, \mathbf{E} \leftrightarrow \mathbf{H}, \mathbf{D} \leftrightarrow \mathbf{B}$ という対応により、電氣現象と磁氣現象がまったく同じ形式で扱えるというメリットがあるためこの立場(**E-H** 対応)が存在する。**E-H** 対応での磁気に関するクーロンの法則は

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{q_{m1}q_{m2}}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (31)$$

¹ 鈴木, 小塩両氏が彼らの著書で述べているように、非有理系では 1 次元問題の式の中に係数 4π が現れ、球対称問題では逆に 4π が消えるという(イメージとは逆の)違和感が生じる。これは、非有理系では単位電荷から電氣力線が 4π 本出ているとするのに対して、有理系では単位電荷から電氣力線が 1 本出ているとする前提(設定)の違いが原因である。また、両氏は、「MKSA 系が純理的にも他に隔絶してすぐれているかに思い込まれると、それは誤りである。」「MKSA 系では、非対称の電磁単位系統であるため、電磁波らしくないところに c が現れ(例: ϵ_0)、かえってマックスウェル方程式のように電磁波と直接関連するところにそれが現れず、積 $\epsilon\mu$ の中に埋没してくる。これも MKSA 系の欠点の一つである」と述べている。(筆者もその通りであると思う。)

で表され、電荷のクーロンの法則と同様に、 q_{m1} と q_{m2} という磁荷間に力 \mathbf{F} がはたらくことを意味している。電荷のクーロンの法則

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (32)$$

から、電荷 q_2 が作る電場 \mathbf{E} が

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (33)$$

で与えられ、力が $\mathbf{F} = q_1 \mathbf{E}$ で表されるのと同様に、磁荷 q_{m2} が作る磁場 \mathbf{H} を、

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{q_{m2}}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (34)$$

と書くことができ、磁荷間の力を

$$\mathbf{F} = q_{m1} \mathbf{H} \quad (35)$$

と表すことができる。

一方、 $\mathbf{E}-\mathbf{B}$ 対応の立場では、磁荷というものを考えず、磁石の基本は(円)電流であるとする。磁氣的な力の基本法則はクーロンの法則ではなくアンペールの力(式(3))

$$\mathbf{F} = Id\mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad (36)$$

であり、電流とビオ・サバルの法則で表される磁場(正確には磁束密度)の間の相互作用により力が生じる¹。つまり、 $\mathbf{E}-\mathbf{B}$ 対応は、電流が作る磁場を出発点とする立場である²。磁束密度 \mathbf{B} は μ_0 によって \mathbf{H} と結ばれ、真空中では

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad (37)$$

の関係がある。式(36)を $\mathbf{E}-\mathbf{H}$ 対応での $\mathbf{F} = q_{m1} \mathbf{H}$ (式(35))に対応する式と見なすことができるから、 $\mathbf{E}-\mathbf{B}$ 対応では、電流素片 $Id\mathbf{l}$ を(一種の)磁荷、 \mathbf{B} を磁場と考えていることになる³。しかし、式(36), (37)より、 $\mathbf{F} = \mu_0 Id\mathbf{l} \times \mathbf{H}$ の形にして磁場をあらわに示し、この \mathbf{H} が作用して力 \mathbf{F} がはたらく対象として磁荷に相当するものと考えてしまうと、磁場を(\mathbf{B} ではなく) \mathbf{H} とする $\mathbf{E}-\mathbf{H}$ 対応と同じ立場になってしまうので、あくまで $\mathbf{E}-\mathbf{B}$ 対応の立場で磁気のクーロンの法則を表す必要がある。そこで、 $\mathbf{E}-\mathbf{H}$ 対応で書かれたクーロンの法則(たとえば式(35))

¹ アンペールの式は有名な「フレミングの左手の法則」を表したものであり、親指 = \mathbf{F} , 人差し指 = \mathbf{B} , 中指 = $Id\mathbf{l}$ という対応になるが、外積を習得していれば(=大学生は)「フレミング」を使う必要はなく、 $Id\mathbf{l}$ と \mathbf{B} のなす角が鈍角になると(指が痛いので)外積で考える方がよい。旧国鉄吹田教習所の電気工学の講義では「親指 = \mathbf{F} = うごき, 人差し指 = \mathbf{B} = じば, 中指 = $Id\mathbf{l}$ = でんりゅう」を略して(フレミングの右手法則も左手法則も)「うじでん = 宇治電 (現 山陽鉄道)」と呼んでいたというエピソードがある。

² もちろん、磁石が作る磁場も電流が作る磁場も本質は同じである。

³ $\mathbf{E}-\mathbf{B}$ 対応では \mathbf{B} を単に磁場と呼ぶことが多いが、正しくは、 \mathbf{H} を「磁場の強さ」、 \mathbf{B} を「磁束密度」と呼ぶべきである。

$$\mathbf{F} = q_m \mathbf{H} \quad (38)$$

の形に合わせて、**E-B**対応でのクーロンの法則の式を、

$$\mathbf{F} = \xi \mathbf{B} \quad (39)$$

の形に書き、“新しい”磁荷 ξ を形式的に導入すると、真空中では $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ であるから、 $\mathbf{F} = \mu_0 \xi \mathbf{H}$ となり、**E-B**対応での磁荷 ξ は**E-H**対応の磁荷 q_m と(μ_0 の分だけ)次元も値も異なることになる。つまり、

$$\xi = \frac{q_m}{\mu_0} \quad (40)$$

であり、 ξ の単位は A m, q_m の単位は $\text{N A}^{-1} \text{m}$ (= Wb; ウェーバ¹)である。同じ磁荷であるにもかかわらず単位も大きさも異なるのは、そもそも磁荷というものを考えない**E-B**対応の立場において、あえて磁荷というものを考えた結果である。言い換えると、磁荷という物理量に違いを設けたことによって、**E-B**対応でも**E-H**対応でも \mathbf{E} , \mathbf{B} , μ_0 が同じ次元と値をもつことができているのである²。

仮想的な磁荷とは別に、測定される物理量の中にも**E-B**対応と**E-H**対応とで定義が変わるものがあることに注意しておく必要がある。その典型例は磁化である。**E-H**対応での磁化 \mathbf{M}_H (添字の H は**E-H**対応を意味する)は次式で与えられる。

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu_0 \mathbf{H} + \frac{4\pi}{k} \mathbf{M}_H \quad (41)$$

これは、電気(静電)系の関係式

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \frac{4\pi}{k} \mathbf{P} \quad (42)$$

(\mathbf{D} は電束密度、 \mathbf{E} は電場、 \mathbf{P} は分極)における分極 \mathbf{P} と磁気系の磁化 \mathbf{M}_H が対応していることを表している。

一方、**E-B**対応の場合、 \mathbf{H} を次式により導入する。

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \frac{4\pi}{k} \mathbf{M}_B \quad (43)$$

この式中の \mathbf{M}_B が**E-B**対応の磁化である。つまり、

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \frac{4\pi\mu_0}{k} \mathbf{M}_B \quad (44)$$

であり、式(41)と式(44)の比較から、

¹ 名称はドイツの物理学者 W. H. Weber(ウェーバー)に由来するが、単位名としては「ウェーバ」と書く。

² 電場や磁場が**E-H**対応と**E-B**対応とで異なる値をもつことになるは大混乱を招くであろう。

$$\mathbf{M}_B = \frac{\mathbf{M}_H}{\mu_0} \quad (45)$$

という関係が得られ、同じ磁化と呼ばれる物理量でも、**E-H** 対応と **E-B** 対応とは同一ではなく、式(40)の磁荷と同様に μ_0 倍の違いが生じることになる(μ_0 は $4\pi \times 10^{-7} \text{ N A}^{-2}$ という数値であるから差は非常に大きい)。このように、**E-H** 対応と **E-B** 対応のいずれの対応で定義されている式であるかを認識した上で式や数値を扱わなければ、桁違いの誤りを引き起こす危険性がある。

§3 単位の換算

以下では、いろいろな単位系の間での単位の換算を行う。まず、最も基本的な MKSA 系の C(クーロン)と CGS esu 系の電荷単位 esu との変換を行う¹。この場合、基本になるのはクーロンの法則であり、MKSA 系では、

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (46)$$

CGS esu 系では、

$$F = \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (47)$$

と表される²。両者がまったく同じ現象を表している場合でも、基本単位の違いを反映して、両左辺の F の値は異なる尺度(N(ニュートン)と dyn(ダイン)は 10^5 倍異なる)で測られる。単純な例を示すと、ある式の中で長さを表現する変数 x がメートル(m)単位で測られるとき、その式の x をセンチメートル(cm)単位で測られる変数 x' に置き換えるには、 $x \text{ m} = x' \text{ cm}$ に対して $\text{m} = 100 \text{ cm}$ を適用して得られる

$$x = x' \frac{\text{cm}}{\text{m}} = \frac{x'}{100} \quad (48)$$

という関係をもとの式の x に代入すればよい。以下に示す単位の換算はすべてこの(単純な)原理を利用する。式(48)の x も x' も物理量ではなく数値を表している。このような数値間の関係式を「数値方程式」と呼ぶ。数値方程式 $100x = x'$ は、単位間の関係 $\text{m} = 100 \text{ cm}$ と逆の関係になっており³、(当然ながら)物理量を表現する単位のサイズが大きい文字ほど数値は小さくなる。

C と esu の換算を行うために、クーロンの法則の数値方程式を変形する。MKSA 系で書かれた式(つまり N で測られた力)と CGS esu 系で書かれた式(dyn で測られた力)を区別するために、後者の文字にプライム記号(')を付けて、

¹ 電荷の単位としての esu をフランクリン(Fr)と呼ぶ場合がある。

² 単位の換算を考える場合はベクトル量で考える必要がないので、スカラーで表した式を用いることにする。

³ これを単位と測定値の「反傾的關係」と呼ぶ。

$$F' = \frac{q_1' q_2'}{r'^2} \quad (49)$$

と書くことにする。MKSA系の式(46)を数値方程式とみなし、既知の単位間の換算関係を利用して変形したのちCGS esu系の式を“抜き取る”ことで、未知のCとesuの単位としての大きさの比を求めるという手順を進める。まず、式(46)に現れた文字(物理量)を、

$$F \text{ N} = F' \text{ dyn} \longrightarrow F = F' \frac{\text{dyn}}{\text{N}} \quad (50)$$

$$q \text{ C} = q' \text{ esu} \longrightarrow q = q' \frac{\text{esu}}{\text{C}} \quad (51)$$

$$r \text{ m} = r' \text{ cm} \longrightarrow r = r' \frac{\text{cm}}{\text{m}} \quad (52)$$

の関係を用いて置き換えると、

$$F' \left(\frac{\text{dyn}}{\text{N}} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1' q_2' \left(\frac{\text{esu}}{\text{C}} \right)^2}{r'^2 \left(\frac{\text{cm}}{\text{m}} \right)^2} \quad (53)$$

が得られる。式(53)は(物理量の方程式ではなく)数値方程式であるから、変換後、「'」が付いた文字の関係式が得られたとき、 F' や q_1' などの文字以外はすべて数値になっていなければならない。したがって、式(53)の ϵ_0 を(次元がない)数値として置き換える必要がある。式(46)の中の ϵ_0 は式(30)で示したように $8.854187817... \times 10^{-12}$ という大きさであるが、この数値表記をそのまま式(53)に代入すると式が見にくくなるので、 ϵ_0 の大きさを

$$\epsilon_0 \rightarrow \frac{10^{11}}{4\pi\zeta^2} \quad (54)$$

と表す(当然ながら、式(54)の値は $8.854187817... \times 10^{-12}$ である)。ここで、 ζ は cm s⁻¹ 単位で表した真空中光速の数値($2.99792458 \times 10^{10}$)である¹。($10^{11}/4\pi$)という因子の中の($10^7/4\pi$)は、式(29), (30)からわかるように μ_0 に由来しているが、 10^4 倍の違いは $\text{m}^2 \text{s}^{-2}$ と

¹ 物理量ではなく無次元の数値であることに注意する。IUPAC 発行の、E. R. Cohen, T. Cvitaš, J. G. Frey, B. Holmström, K. Kuchitsu, R. Marquardt, I. Mills, F. Pavese, M. Quack, J. Stohner, H. L. Strauss, M. Takami, and A. J. Thor, *Quantities, Units and Symbols in Physical Chemistry*, 3rd ed., 2007 (同書は、表紙の色にちなんで「Green Book」と呼ばれている)の日本語訳である、産業技術総合研究所計量標準総合センター 訳「物理化学で用いられる量・単位・記号」第3版、講談社サイエンティフィク (2009年), p. 162, 168, 173に記されている「 ζ は、厳密に正確な無名数 $\zeta = c_0/(\text{cm s}^{-1}) = 29\,979\,245\,800$ である。」という記述にしたがって、本書でも「 ζ 」を用いる。

$\text{cm}^2 \text{s}^{-2}$ の比を反映している。式(54)の ε_0 を式(53)に代入して次式を得る。

$$F' \left(\frac{\text{dyn}}{\text{N}} \right) = \frac{1}{4\pi} \frac{4\pi\zeta^2}{10^{11}} \frac{q_1' q_2' \left(\frac{\text{esu}}{\text{C}} \right)^2}{r'^2 \left(\frac{\text{cm}}{\text{m}} \right)^2} \quad (55)$$

したがって、

$$F' \left(\frac{1}{10^5} \right) = \frac{\zeta^2}{10^{11} \times 10^{-4}} \frac{q_1' q_2'}{r'^2} \left(\frac{\text{esu}}{\text{C}} \right)^2 \quad (56)$$

さらに変形して、

$$F' = \frac{10^5 \zeta^2}{10^{11} \times 10^{-4}} \frac{q_1' q_2'}{r'^2} \left(\frac{\text{esu}}{\text{C}} \right)^2 = \frac{\zeta^2}{10^2} \frac{q_1' q_2'}{r'^2} \left(\frac{\text{esu}}{\text{C}} \right)^2 \quad (57)$$

この式から、CGS esu 系のクーロンの法則式(式(49))を抜き取ると(言い換えると、 $F' = q_1' q_2' / r'^2$ を代入すると)、

$$1 = \frac{\zeta^2}{10^2} \left(\frac{\text{esu}}{\text{C}} \right)^2 \quad (58)$$

であるから、

$$\left(\frac{\text{esu}}{\text{C}} \right)^2 = \frac{10^2}{\zeta^2} \quad (59)$$

つまり、

$$\frac{\text{esu}}{\text{C}} = \frac{10}{\zeta} \quad (60)$$

となり、単位の換算として、

$\text{(電荷)} \quad \text{esu} = \frac{10}{\zeta} \text{C} \quad \text{または} \quad \text{C} = \frac{\zeta}{10} \text{esu} \quad (61)$

が得られる。繰り返しになるが、 ζ が $2.99792458 \times 10^{10}$ という大きさの無次元数であることに注意する。また、単位換算表などに、 $1 \text{ esu} = 3.335641 \times 10^{-10} \text{ C}$ あるいは $1 \text{ C} = 2.99792458 \times 10^9 \text{ esu}$ と書かれていることがあるが、これらの換算には物理法則が関係し

ているという意味で、 $1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$ のような換算とは異なる換算である¹。

上記の C と esu の変換はあまりにも有名であり、換算表に頻繁に登場するものなので、以下では、通常、あまり見かけない特殊なケースを扱うことにする。MKSA 系の C と CGS emu 系の電荷の単位の換算はどのようになるであろうか。CGS emu 系の電荷の単位には名前がないので、ここでは単に「emu 電荷」と書くことにする。まず、MKSA 系でのクーロンの法則は、

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (62)$$

一方、CGS emu 系でのクーロンの法則は、

$$F' = \frac{1}{\epsilon'_0} \frac{q'_1 q'_2}{r'^2} \quad (63)$$

である。前回のケースと同様に式(62)を数値方程式として変形していくと、

$$F' \left(\frac{\text{dyn}}{\text{N}} \right) = \frac{1}{4\pi} \frac{4\pi\zeta^2}{10^{11}} \frac{q'_1 q'_2 \left(\frac{\text{emu電荷}}{\text{C}} \right)^2}{r'^2 \left(\frac{\text{cm}}{\text{m}} \right)^2} \quad (64)$$

となる。式(28)にもとづいて、 ϵ'_0 の大きさが $1/\zeta^2$ であることを考慮すると、

$$F' \left(\frac{1}{10^5} \right) = \frac{1}{10^{11} \times \epsilon'_0 \times 10^{-4}} \frac{q'_1 q'_2}{r'^2} \left(\frac{\text{emu電荷}}{\text{C}} \right)^2 \quad (65)$$

つまり、

$$F' = \frac{10^5}{10^{11} \times \epsilon'_0 \times 10^{-4}} \frac{q'_1 q'_2}{r'^2} \left(\frac{\text{emu電荷}}{\text{C}} \right)^2 = \frac{1}{10^2} \frac{1}{\epsilon'_0} \frac{q'_1 q'_2}{r'^2} \left(\frac{\text{emu電荷}}{\text{C}} \right)^2 \quad (66)$$

この式から、CGS emu 系のクーロンの法則の数値方程式(式(63))を抜き取ると、

$$1 = \frac{1}{10^2} \left(\frac{\text{emu電荷}}{\text{C}} \right)^2 \quad (67)$$

であるから、

¹ 前出の「Green Book」日本語版 p. 235 に掲載されている「エネルギーに関する単位の相互換算表」では、物理法則が関係する換算を示すために、単なる等号「=」ではなく「≐」という記号を用いている。

$$\left(\frac{\text{emu電荷}}{\text{C}}\right)^2 = 10^2 \quad (68)$$

つまり,

$$\frac{\text{emu電荷}}{\text{C}} = 10 \quad (69)$$

となり, 単位の換算として,

(電荷)	$\text{emu電荷} = 10\text{C} \text{ または } \text{C} = \frac{\text{emu電荷}}{10}$	(70)
------	---	------

が得られる。このように, あまり見かけない単位の換算でも簡単に行うことができる。

ここまで電気量の方を中心に扱ってきたので, 次は, MKSA 系の磁気量 Wb(= N A⁻¹ m) と CGS emu 系の磁気量(emu)の間の換算を行ってみる。単位換算の問題は **E-H** 対応か **E-B** 対応かにはよらないので, 比較的理解しやすい **E-H** 対応で考えることにする。MKSA 系の磁気のクーロンの法則は,

$$F = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{q_{m1}q_{m2}}{r^2} \quad (71)$$

であり, CGS emu 系では,

$$F' = \frac{q'_{m1}q'_{m2}}{r'^2} \quad (72)$$

である。これまでと同様の手順で変形を進めると,

$$F' \left(\frac{\text{dyn}}{\text{N}} \right) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{4\pi \times 10^{-7}} \frac{q'_{m1}q'_{m2} \left(\frac{\text{emu}}{\text{Wb}} \right)^2}{r'^2 \left(\frac{\text{cm}}{\text{m}} \right)^2} \quad (73)$$

となる。ここで, μ_0 には $4\pi \times 10^{-7}$ (数値)を代入した。変形を続けると,

$$F' \left(\frac{1}{10^5} \right) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{4\pi \times 10^{-7} \times 10^{-4}} \frac{q'_{m1}q'_{m2} \left(\frac{\text{emu}}{\text{Wb}} \right)^2}{r'^2} \quad (74)$$

さらに,

$$F' = \frac{10^5}{(4\pi)^2 \times 10^{-7} \times 10^{-4}} \frac{q'_{m1} q'_{m2}}{r'^2} \left(\frac{\text{emu}}{\text{Wb}} \right)^2 = \frac{10^{16}}{(4\pi)^2} \frac{q'_{m1} q'_{m2}}{r'^2} \left(\frac{\text{emu}}{\text{Wb}} \right)^2 \quad (75)$$

となり、この式から、CGS emu 系でのクーロンの式(式(72))を抜き取ると、

$$\left(\frac{\text{emu}}{\text{Wb}} \right)^2 = \frac{(4\pi)^2}{10^{16}} \quad (76)$$

が残る。したがって、

$$\frac{\text{emu}}{\text{Wb}} = \frac{4\pi}{10^8} \quad (77)$$

であるから、

$$\text{emu} = \frac{4\pi}{10^8} \text{Wb} \text{ または } \text{Wb} = \frac{10^8}{4\pi} \text{emu} \quad (78)$$

が得られる。これが、磁気量に関する MKSA 系と CGS emu 系間の換算である。

次に、CGS emu 系の磁束の単位 Mx (マクスウェル)と MKSA 系の磁束の単位 Wb の間の換算を考えてみよう。磁束 Φ は、磁束密度 \mathbf{B} を面積分したものであり、

$$\Phi = \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS \quad (79)$$

の関係があるから¹、まず、磁束密度の単位換算から考える。MKSA 系での磁束密度 B は、真空中の場合、磁場 H と

$$B = \mu_0 H \quad (80)$$

で結ばれる。一方、CGS emu 系では $\mu_0 = 1$ であるから

$$B' = H' \quad (81)$$

である。これらの間の換算を行うために必要な、磁場 H と H' の単位換算をまだ行っていないので、先に磁場の単位換算を行うことにする。MKSA 系の磁場 H は式(34)より

$$H = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{q_m}{r^2} \quad (82)$$

と書け、単位は A m^{-1} である。一方、CGS emu 系での磁場 H' は

¹ dS は面要素、 \mathbf{n} は面要素の単位法線ベクトル。

$$H' = \frac{q'_m}{r'^2} \quad (83)$$

であり，単位は $\text{dyn emu}^{-1} = \text{dyn}^{1/2} \text{cm}^{-1}$ である(これには Oe(エルステッド)という名称が与えられている)。 A m^{-1} と Oe の換算には q_m と q'_m つまり Wb と emu の換算が必要であるが，すでに式(78)で得たからその結果($\text{emu} = 4\pi \times 10^{-8} \text{Wb}$)を利用すればよい。式(82)を変形すると，

$$H' \left(\frac{\text{Oe}}{\text{A m}^{-1}} \right) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{4\pi \times 10^{-7}} \frac{q'_m \left(\frac{\text{emu}}{\text{Wb}} \right)}{r'^2 \left(\frac{\text{cm}}{\text{m}} \right)^2} \quad (84)$$

となり，既知の単位換算を利用すると，

$$H' \left(\frac{\text{Oe}}{\text{A m}^{-1}} \right) = \frac{4\pi \times 10^{-8}}{(4\pi)^2 \times 10^{-7} \times 10^{-4}} \frac{q'_m}{r'^2} \quad (85)$$

したがって，

$$\frac{\text{Oe}}{\text{A m}^{-1}} = \frac{10^3}{4\pi} \quad (86)$$

つまり，

(磁場の強さ)	$\text{Oe} = \frac{10^3}{4\pi} \text{A m}^{-1} \quad \text{または} \quad \text{A m}^{-1} = \frac{4\pi}{10^3} \text{Oe} \quad (87)$
---------	---

を得る。これで，磁場の単位換算ができたので，次は，磁束密度の換算を行う。磁束密度には MKSA 系，CGS emu 系いずれにおいても単位に名称が与えられており，前者は T(テスラ)，後者は G(ガウス)である。したがって，式(80)は

$$B' \left(\frac{\text{G}}{\text{T}} \right) = 4\pi \times 10^{-7} H' \left(\frac{\text{Oe}}{\text{A m}^{-1}} \right) \quad (88)$$

と変形される。直前の Oe と A m^{-1} の間の換算の結果(式(87))を適用して得られる

$$B' \left(\frac{\text{G}}{\text{T}} \right) = 4\pi \times 10^{-7} \times \frac{10^3}{4\pi} H' = 10^{-4} H' \quad (89)$$

から CGS emu 系の式 $B' = H'$ (式(81))を抜き取れば，

$$\frac{G}{T} = 10^{-4} \quad (90)$$

となり、G と T の関係

(磁束密度)	$G = 10^{-4} T$ または $T = 10^4 G$
--------	----------------------------------

(91)

が得られる。以上で、当初の目的であった磁束の換算を行う準備がすべて整った。

磁束を表す式は式(79)に示した

$$\Phi = \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS \quad (92)$$

であるから、MKSA 系の磁束の単位 Wb と CGS emu 系の磁束の単位 Mx の換算を行うために式(92)を変形すると、

$$\Phi \left(\frac{Mx}{Wb} \right) = \int \mathbf{B}' \left(\frac{G}{T} \right) \cdot \mathbf{n} dS' \left(\frac{cm^2}{m^2} \right) \quad (93)$$

となる。G と T の換算は式(91)より $G = 10^{-4} T$ であるから、

$$\Phi \left(\frac{Mx}{Wb} \right) = 10^{-4} \times 10^{-4} \int \mathbf{B}' \cdot \mathbf{n} dS' \quad (94)$$

これより、

$$\frac{Mx}{Wb} = 10^{-8} \quad (95)$$

つまり、

(磁束)	$Mx = 10^{-8} Wb$ または $Wb = 10^8 Mx$
------	--------------------------------------

(96)

が得られる。ここで、MKSA 系では、次元が同じである磁気量と磁束が両方とも Wb という名称で呼ばれるが、CGS emu 系では磁束にのみ Mx という名称があるだけで磁気量には名称がないことに注意する。MKSA 系と同様に、CGS emu 系の磁気量にも Mx という名称を与えてもよいと考えられるかもしれないが、磁気量間の換算は、

$$Wb = \frac{10^8}{4\pi} \text{emu} \quad (97)$$

であり、磁束間の換算は、

$$Wb = 10^8 Mx \quad (98)$$

であるから、磁気量間の換算と磁束間の換算係数は同じにならず 4π 分の違いがある。

§4 異なる単位系での式表現

前節では、単位の換算を扱ったが、単位系間で式の変換を行うにはどうすればいいであろうか、たとえば、§1 で示したマクスウェルの方程式の 1 つである式(13)は、MKSA 系では、

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (99)$$

と表されるが、この式を Gauss 系の表記に変換する方法を考えてみよう。この式の場合は、あらゆる単位系に対応できる式(7)と表 1 を使えば、任意の単位系での形を知ることができるが、ここでは式(7)のような一般形が与えられていないとして考える。実は、式の変換に関して新しい方法を考案する必要はなく、すでに述べた単位換算の原理を使えばよいのであるが¹、以下でその手順を具体的に見ることにする。

式(99)の中の ∇ も E も B も最終的に式の中に残すものであるから、これらの単位換算を把握しておく必要がある。Gauss 系では、電気に関する量を CGS esu 単位で扱うから(表 1)、電場については、これまでと同様の方法で、MKSA 系の電場(E)と Gauss 系の電場(E')の単位換算を行えばよい。MKSA 系の電場 E は式(33)の形を参考にして)

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad (100)$$

であり、Gauss 系の電場 E' は

$$E' = \frac{q'}{r'^2} \quad (101)$$

である。ここで、 E の単位を「MKSA 電場」、 E' の単位を「esu 電場」と書いて、式(100)を変形すると、

$$E' \left(\frac{\text{esu電場}}{\text{MKSA電場}} \right) = \frac{1}{4\pi} \frac{4\pi\zeta^2}{10^{11}} \frac{q' \left(\frac{\text{esu電荷}}{\text{C}} \right)}{r'^2 \left(\frac{\text{cm}}{\text{m}} \right)^2} \quad (102)$$

となり、式(61)を利用して

$$E' \left(\frac{\text{esu電場}}{\text{MKSA電場}} \right) = \frac{4\pi\zeta^2 \times 10}{4\pi \times 10^{11} \times \zeta \times 10^{-4}} \frac{q'}{r'^2} = \frac{\zeta}{10^6} \frac{q'}{r'^2} \quad (103)$$

¹ 単位と数値(観測値)の反傾的關係を利用する。

と変形できるから、これより式(101)を抜き取ると

$$\text{MKSA電場 (N C}^{-1}\text{)} = \frac{10^6}{\zeta} \text{esu電場 (dyn}^{1/2} \text{ cm}^{-1}\text{)} \quad (104)$$

が得られる。単位と数値(観測値)には反傾性があることから E と E' の関係として、

$$E = \frac{\zeta}{10^6} E' \quad (105)$$

が得られる。また、磁場に関しても、 B の単位である T と B' の単位である G の間には、

$$T = 10^4 \text{ G} \quad (106)$$

の関係(式(91))があるから、 B と B' の関係は、

$$B = 10^{-4} B' \quad (107)$$

となる。最後に、 ∇ をあらわに書くと、

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z \quad (108)$$

であり、 ∇ の単位が m^{-1} 、 ∇' の単位が cm^{-1} であること、および $\text{m}^{-1} = 10^{-2} \text{ cm}^{-1}$ より、

$$\nabla = 10^2 \nabla' \quad (109)$$

となる。これら(式(105), (107), (109))を MKSA 系の式(式(99))に代入すると、

$$10^2 \nabla' \times \frac{\zeta}{10^6} \mathbf{E}' = -10^{-4} \frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t} \quad (110)$$

$$\nabla' \times \mathbf{E}' = -\frac{1}{\zeta} \frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t} \quad (111)$$

が得られる。この数値方程式の各文字に Gauss 系として付ける単位は、 ∇' が cm^{-1} 、 \mathbf{E}' が $\text{g}^{1/2} \text{ cm}^{-1/2} \text{ s}^{-1}$ 、 \mathbf{B}' は $\text{g}^{1/2} \text{ cm}^{-1/2} \text{ s}^{-1}$ 、 t は s であるから、 ζ には cm s^{-1} という単位が付くことになる。 ζ は $2.99792458 \times 10^{10}$ という数値であるが、これに cm s^{-1} という単位を付けると真空中の光速になるから、式(111)を物理量の関係式にするには ζ を c_0 と書けばよい。したがって、Gauss 系で表した Maxwell の方程式(のうちの式(13)にあたるもの)として、

$$\nabla' \times \mathbf{E}' = -\frac{1}{c_0} \frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t} \quad (112)$$

が得られる。この結果は、表 1 を利用して式(7)を Gauss 系の式として表したものと一致している。

MKSA 系と Gauss 系のクーロンの法則式の比較から、「MKSA 系で書かれた式を Gauss 系で書かれた式に書き換えるには、MKSA 系の式に現れる $4\pi\epsilon_0$ の部分を 1 に置き換えれば

よい」というような“対処療法”的方法を記した解説を目にすることがあるが、この方法がいかに危険であるかがわかるであろう(そもそも、式(99)には $4\pi\epsilon_0$ がないので対処療法が使えない)。逆に、式の中に埋もれている「1」を見つけることは到底不可能であるから、単なる文字や数字の置き換えだけで式変形ができると考えてはならない。

次に、異なる単位系への式の変換の例として、MKSA系の磁気モーメントを Gauss系で表すことを考えてみる。電子の軌道角運動量 \mathbf{l} にもとづく磁気モーメントは、MKSA系で $\mathbf{E-H}$ 対応の場合、次のような表記になる。

$$\mathbf{m}_H = -\frac{\mu_0 e}{2m_e} \mathbf{l} \quad (\mathbf{E-H} \text{ 対応}) \quad (113)$$

ここで、 e は電気素量(電子の電荷の大きさで、ここでは $e > 0$ にとる)、 m_e は電子の質量であり、右辺の負号は電子の電荷が負であることに対応している。式中の μ_0 は真空透磁率($4\pi \times 10^{-7} \text{ N A}^{-2}$)であり、 \mathbf{m}_H の単位は $\text{N A}^{-1} \text{ m}^2 (= \text{Wb m})$ である。なお、 $\mathbf{E-B}$ 対応の磁気モーメントを \mathbf{m}_B と記すと

$$\mathbf{m}_B = -\frac{e}{2m_e} \mathbf{l} \quad (\mathbf{E-B} \text{ 対応}) \quad (114)$$

となり、単位が $\mathbf{E-H}$ 対応とはまったく異なる A m^2 となることに注意する。つまり、 $\mathbf{E-H}$ 対応の磁荷に $1/\mu_0$ がかけられたことに対応して、 \mathbf{m}_H に $1/\mu_0$ がかけられた形になっている(式(40)および式(45)参照)。MKSA系での磁気モーメントの単位は Wb m であり、これを Gauss系に変換するには、 Wb を $\text{emu cm} (= \text{dyn}^{1/2} \text{ cm}^{-1})$ に変換すればよい。 Wb と emu の変換はすでに式(78)で得たから、

$$\text{Wb m} = \frac{10^8}{4\pi} \text{emu m} = \frac{10^{10}}{4\pi} \text{emu cm} \quad (115)$$

となり、

$$\mathbf{m}_H = \frac{4\pi}{10^{10}} \mathbf{m}'_H \quad (116)$$

が得られる。Gauss系は電荷については esu を用いるので、式(61)の

$$C = \frac{\zeta}{10} \text{esu} \quad (117)$$

より

$$e = \frac{10}{\zeta} e' \quad (118)$$

となる。質量 m_e は MKSA系では kg 、Gauss系では g であるから、 $\text{kg} = 10^3 \text{ g}$ より、

$$m_e = 10^{-3} m'_e \quad (119)$$

となる。さらに、角運動量 l は MKSA 系では $\text{kg m}^2 \text{s}^{-1}$ 、Gauss 系では $\text{g cm}^2 \text{s}^{-1}$ であるから、 $\text{kg m}^2 \text{s}^{-1} = 10^7 \text{g cm}^2 \text{s}^{-1}$ より、

$$l = 10^{-7} l' \quad (120)$$

を得る。式(116), (118), (119), (120)を式(113)に代入すると、

$$\frac{4\pi}{10^{10}} \mathbf{m}' = -\frac{4\pi \times 10^{-7}}{2} \frac{\frac{10}{\zeta} e'}{10^{-3} m'_e} 10^{-7} l' \quad (121)$$

となり、これを整理して、

$$\mathbf{m}'_H = -\frac{e'}{2m'\zeta} l' \quad (122)$$

を得る。それぞれの文字に単位を付けて考えると、 ζ は真空中の光速 c_0 に置き換えられるから、最終的に、Gauss 系での磁気モーメントを表す式として

$$\mathbf{m}'_H = -\frac{e'}{2m'c_0} l' \quad (123)$$

が得られる。式(123)は式(113)とまったく同じ物理量を表しているが、一見しただけでは同じ物理量とは思えないくらい異なった形をしている。

以上のように、単位と数値の反傾性を利用して、希望する単位系で書かれた式表現を得ることができる。最後に、代表的 4 単位系の単位をまとめたものを表 2 から表 5 に示す。

表 2. MKSA 単位系(有理 4 元系) (**E-H** 対応)

物理量	記号	名称	単位			
電荷	q	クーロン(C)	C			
誘電率	ϵ	—	$N^{-1} C^2 m^{-2}$	$kg^{-1} m^{-3} C^2 s^2$		
電場	\mathbf{E}	—	$N C^{-1}$	$kg m C^{-1} s^{-2}$	$V m^{-1}$	
電束密度	\mathbf{D}	—	$C m^{-2}$			
双極子モーメント	μ	※	C m			
磁荷(磁気量)	q_m	ウェーバ(Wb)	$N A^{-1} m$	$kg m^2 C^{-1} s^{-1}$	V s	H A
磁束	Φ	ウェーバ(Wb)	$N A^{-1} m$	$kg m^2 C^{-1} s^{-1}$	V s	H A
透磁率	μ	—	$N A^{-2}$	$kg m C^{-2}$	$Wb^2 N^{-1} m^{-2}$	$H m^{-1}$
磁場	\mathbf{H}	—	$A m^{-1}$	$N Wb^{-1}$		
磁束密度	\mathbf{B}	テスラ(T)	$N A^{-1} m^{-1}$	$Wb m^{-2}$		
磁気モーメント	m_H	—	$N A^{-1} m^2$	$Wb m$		

・真空透磁率： $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} N A^{-2}$

・真空誘電率： $\epsilon_0 = 1/(\mu_0 c_0^2) = 10^{11}/(4\pi\zeta^2) N^{-1} C^2 m^{-2}$

c_0 は真空中の光速(次元あり)。 ζ は $cm s^{-1}$ 単位での真空中の光速の値(無次元)。

・**E-H** 対応では $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M}_H$ 、**E-B** 対応では $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{M}_B$ (\mathbf{M}_H , \mathbf{M}_B はそれぞれ **E-H** 対応と **E-B** 対応での磁化)。

・**E-B** 対応での磁荷は $\xi = q_m/\mu_0$ であり、単位は A m。

・ m_H は **E-H** 対応の磁気モーメント。**E-B** 対応の磁気モーメントは $m_B = m_H/\mu_0$ で定義され、単位は $A m^2$ 。

・インダクタンスの単位：H(ヘンリー) = $N m A^{-2} = kg m^2 C^{-2} = V A^{-1} s = Wb A^{-1}$

・電荷：C(クーロン) = $(\zeta/10) esu = (\zeta/10) Fr$ (フランクリン)

・磁束：Wb(ウェーバ) = $10^8 Mx$ (マクスウェル)

・磁場： $A m^{-1} = (4\pi/10^3) Oe$ (エルステッド)

・磁束密度：T(テスラ) = $10^4 G$ (ガウス)

※ 双極子モーメントに対して D(デバイ)という単位が使われることがあるが $D = C m$ ではない。D(デバイ)はもともと CGS esu の双極子モーメントの単位(esu cm)に対して $D = 10^{-18} esu cm$ として定義されたものであり SI 単位ではない。 $D = 10^{-18} esu cm = (10^{-18})(10/\zeta)(10^{-2}) C m = (10^{-19}/\zeta) C m = 3.335640... \times 10^{-30} C m$ である。

表 3. CGS esu(CGS 静電単位系)(非有理 3 元系)

物理量	記号	名称	単位		
電荷	q	フランクリン(Fr)	esu	$\text{dyn}^{1/2} \text{cm}$	$\text{g}^{1/2} \text{cm}^{3/2} \text{s}^{-1}$
誘電率	ϵ	—	-	-	-
電場	\mathbf{E}	—	dyn esu^{-1}	$\text{dyn}^{1/2} \text{cm}^{-1}$	$\text{g}^{1/2} \text{cm}^{-1/2} \text{s}^{-1}$
電束密度	\mathbf{D}	—	dyn esu^{-1}	$\text{dyn}^{1/2} \text{cm}^{-1}$	$\text{g}^{1/2} \text{cm}^{-1/2} \text{s}^{-1}$
双極子モーメント	μ	—	esu cm	$\text{dyn}^{1/2} \text{cm}^2$	$\text{g}^{1/2} \text{cm}^{5/2} \text{s}^{-1}$
磁荷(磁気量)	q_m	—		$\text{dyn}^{1/2} \text{s}$	$\text{g}^{1/2} \text{cm}^{1/2}$
磁束	Φ	—		$\text{dyn}^{1/2} \text{s}$	$\text{g}^{1/2} \text{cm}^{1/2}$
透磁率	μ	—	$\text{cm}^{-2} \text{s}^2$		
磁場	\mathbf{H}	—		$\text{dyn}^{1/2} \text{s}^{-1}$	$\text{g}^{1/2} \text{cm}^{1/2} \text{s}^{-2}$
磁束密度	\mathbf{B}	—		$\text{dyn}^{1/2} \text{cm}^{-2} \text{s}$	$\text{g}^{1/2} \text{cm}^{-3/2}$
磁気モーメント	\mathbf{m}	—		$\text{dyn}^{1/2} \text{cm s}$	$\text{g}^{1/2} \text{cm}^{3/2}$

・真空誘電率： $\epsilon_0 = 1$ (無次元)

・真空透磁率： $\mu_0 = 1/c_0^2 = 1.11265... \times 10^{-21} \text{cm}^{-2} \text{s}^2$

表 4. CGS emu(CGS 電磁単位系)(非有理 3 元系)

物理量	記号	名称	単位		
電荷	q	—		$\text{dyn}^{1/2} \text{s}$	$\text{g}^{1/2} \text{cm}^{1/2}$
誘電率	ϵ	—	$\text{cm}^{-2} \text{s}^2$		
電場	\mathbf{E}	—		$\text{dyn}^{1/2} \text{s}^{-1}$	$\text{g}^{1/2} \text{cm}^{1/2} \text{s}^{-2}$
電束密度	\mathbf{D}	—		$\text{dyn}^{1/2} \text{cm}^{-2} \text{s}$	$\text{g}^{1/2} \text{cm}^{-3/2}$
双極子モーメント	μ	—		$\text{dyn}^{1/2} \text{cm} \text{s}$	$\text{g}^{1/2} \text{cm}^{3/2}$
磁荷(磁気量)	q_m	—	emu	$\text{dyn}^{1/2} \text{cm}$	$\text{g}^{1/2} \text{cm}^{3/2} \text{s}^{-1}$
磁束	Φ	マクスウェル(Mx)	emu	$\text{dyn}^{1/2} \text{cm}$	$\text{g}^{1/2} \text{cm}^{3/2} \text{s}^{-1}$
透磁率	μ	—	-	-	-
磁場	\mathbf{H}	エルステット(Oe)	$\text{dyn} \text{emu}^{-1}$	$\text{dyn}^{1/2} \text{cm}^{-1}$	$\text{g}^{1/2} \text{cm}^{-1/2} \text{s}^{-1}$
磁束密度	\mathbf{B}	ガウス(G)	$\text{dyn} \text{emu}^{-1}$	$\text{dyn}^{1/2} \text{cm}^{-1}$	$\text{g}^{1/2} \text{cm}^{-1/2} \text{s}^{-1}$
磁気モーメント	\mathbf{m}	—	emu cm	$\text{dyn}^{1/2} \text{cm}^2$	$\text{g}^{1/2} \text{cm}^{5/2} \text{s}^{-1}$

- 真空透磁率: $\mu_0 = 1$ (無次元)
- 真空誘電率: $\epsilon_0 = 1/c_0^2 = 1.11265... \times 10^{-21} \text{cm}^{-2} \text{s}^2$
- G(ガウス) = Mx cm⁻²
- 電流に Bi(ビオ)という名称の単位がある。Bi(ビオ) = 10 A

表 5. Gauss 単位系(非有理 3 元系)

物理量	記号	名称	単位		
電荷	q	フランクリン(Fr)	esu	$\text{dyn}^{1/2} \text{cm}$	$\text{g}^{1/2} \text{cm}^{3/2} \text{s}^{-1}$
誘電率	ϵ	—	-	-	-
電場	\mathbf{E}	—	dyn esu^{-1}	$\text{dyn}^{1/2} \text{cm}^{-1}$	$\text{g}^{1/2} \text{cm}^{-1/2} \text{s}^{-1}$
電束密度	\mathbf{D}	—	dyn esu^{-1}	$\text{dyn}^{1/2} \text{cm}^{-1}$	$\text{g}^{1/2} \text{cm}^{-1/2} \text{s}^{-1}$
双極子モーメント	μ	—	esu cm	$\text{dyn}^{1/2} \text{cm}^2$	$\text{g}^{1/2} \text{cm}^{5/2} \text{s}^{-1}$
磁荷(磁気量)	q_m	—	emu	$\text{dyn}^{1/2} \text{cm}$	$\text{g}^{1/2} \text{cm}^{3/2} \text{s}^{-1}$
磁束	Φ	マクスウェル(Mx)	emu	$\text{dyn}^{1/2} \text{cm}$	$\text{g}^{1/2} \text{cm}^{3/2} \text{s}^{-1}$
透磁率	μ	—	-	-	-
磁場	\mathbf{H}	エルステット(Oe)	dyn emu^{-1}	$\text{dyn}^{1/2} \text{cm}^{-1}$	$\text{g}^{1/2} \text{cm}^{-1/2} \text{s}^{-1}$
磁束密度	\mathbf{B}	ガウス(G)	dyn emu^{-1}	$\text{dyn}^{1/2} \text{cm}^{-1}$	$\text{g}^{1/2} \text{cm}^{-1/2} \text{s}^{-1}$
磁気モーメント	m	—	emu cm	$\text{dyn}^{1/2} \text{cm}^2$	$\text{g}^{1/2} \text{cm}^{5/2} \text{s}^{-1}$

• 真空誘電率 : $\epsilon_0 = 1$ (無次元)

• 真空透磁率 : $\mu_0 = 1$ (無次元)

参考文献

1. 鈴木範人, 小塩高文「応用光学 II」, 朝倉書店 (1982 年), pp. 152~156
同書の表 4.1 および表 4.2 に, 単位系間の関係がまとめられている。2 つの表は **E-H** 対応と **E-B** 対応にも配慮されており, 任意の単位系での電磁気学の理論式を簡単に知ることができる素晴らしい表である。さらに, 「(MKSA 系が)どの面からも理想的にできているかというとなかなかそうはいかない」と述べて MKSA 系の欠点を指摘するとともに, 新しい MKSP 系という単位系(=MKSA 系と Gauss 系の長所を組み合わせた単位系)を紹介している。
2. 広瀬立成「**E** と **H**, **D** と **B**」, 共立出版 (1981 年), pp. 23~36
同書 p. 23 に書かれているように「電気的な量と磁気的な量の対応のよさを第一に考えて」基本的に **E-H** 対応の立場で書かれており, 書名もそれを反映しているが, **E-H** 対応と **E-B** 対応の関係に関する丁寧な解説がある。
3. 「世界大百科事典」, 平凡社 (1972 年)
見出し「単位」を参照。専門書ではないものの, 電磁気単位系の話が丁寧に解説されている。文献 1. と類似の表(第 2 表)が掲載されており, それぞれの単位系での基本量や定義がわかりやすく記述されている。また, 単位系の単位同士の数値比をまとめた表(第 4 表)は, 他に例を見ない貴重なもので, 本書で示した単位系間の式変換を機械的に行う場合にきわめて有効である。ただし, 出版年によっては, 該当する表が掲載されていないので注意が必要である¹。
4. A. Sommerfeld(伊藤大介 訳)「理論物理学講座 3 電磁気学」, 講談社 (1982 年), pp. 433~441 (付録: 初学者のための準備)
単位と測定値(数値)の反傾の関係の一般論を解説し, 電磁気学の理論式を各単位系に合わせて変換するための独創的な方法が紹介されている。ただし, 式変形の方向を決める際の「単純性の要請」はやや曖昧で説得力が弱い印象を受ける。(たとえば, Gauss 系は, もともと誘電率と透磁率を無次元としたので, そのしわよせとして式変換の際出てくる光速を物理量として残さなければならないこと, あるいはその逆に, Gauss 系から変換するときには, 光速は数値化されて残す変数以外の定数部分に含めてしまう必要がある, ということが明確に記述されていない。)

¹ 筆者自身が掲載を確認したのは 1972 年 4 月 25 日初版のみ。

電磁気学における単位系

1983年 10月 3日	初版第1刷
1991年 8月 22日	第2版第1刷
1993年 6月 20日	第3版第1刷
1999年 2月 7日	第4版第2刷
2005年 7月 31日	第5版第6刷
2010年 12月 19日	第6版第2刷

著者 山崎 勝義
発行 漁火書店

検印 

印刷 ブルーコピー
製本 ホッチキス
